**2025-6-C2.-** Dimentsio bakarreko uhin harmoniko bat $400ms^{-1}$-ko abiadurarekin higituz doa, ingurune batean. Uhinari dagokion adierazpen matematikoa honako hau da: $y(x,t) = 3sen(kx - 200\pi t + \phi_0)cm$

non $x$ eta $t$, $m$-tan eta $s$-tan eman dira, hurrenez hurren.

Ezaguna da honako hau: $y(0,0) = 1{,}5cm$; eta, berebat, $t = 0$ eta $x = 0$ direnean, oszilazio-abiadura positiboa dela. Lortu:

1. Uhin-zenbakia, $k$; eta hasierako fasea, $\phi_0$.
2. Oszilazioaren azelerazio maximoa, $x$ ardatzeko puntu orokor batean.

(1.) Uhin-funtzio orokorrarekin konparatuko dugu.

$$y(x,t) = 3\sin(\omega t - kx + \phi_0)$$

Emandako funtzioa egokitze, $\sin\alpha = -\sin(-\alpha) \rightarrow$

$\rightarrow y(x,t) = -3\sin(200\pi t - kx - \phi_0)$


Oszilazio abiadura:

$$v(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = -600\pi\cos(200\pi t - kx - \phi_0)$$

Emandako baldintzekin:

$y(0,0) = 1'5cm \longrightarrow 1'5 = -3\sin(0 - 0 - \phi_0) \rightarrow \phi_0 = -\arcsin\left(-\frac{1'5}{3}\right) = \frac{\pi}{6}rad$

$v(0,0) > 0 \longrightarrow -600\pi\cos(0 - 0 - \pi/6) < 0 \rightarrow \boxed{\phi_0 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}rad}$

k kalkulatzeko: $v_h = \frac{\lambda}{T} \longrightarrow \lambda = v_h \cdot T = 400 \cdot \frac{1}{100} = 4m \rightarrow$

$\cdot\ 200\pi = \omega \rightarrow 200\pi = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{1}{100}s$

$\rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$ izanik $\rightarrow \boxed{k = \frac{2\pi}{4} = 0'5\pi\ rad/m}$

(2.) Oszilazio azelerazioa:

$$a(x,t) = \frac{dv(x,t)}{dt} = 120000\pi^2\sin(200\pi t - kx - \phi_0)$$

Honen maximoa sinuaren balioa $\pm1$ izatean lortzen da.

$$\boxed{a_{max} = \pm 120000\pi^2 = \pm 1'84\cdot10^6 cm/s^2 = \pm 1'84\cdot10^4 m/s^2}$$

2023-7-A2

Zeharkako uhin bat, eskuinetik ezkerrerantz hedatuz doa soka luze-luzean zehar. Uhinaren hedatze-abiadura, uhin-luzera eta anplitudea dira $30\,m/s$, $\lambda = 1{,}5m$ eta $0.2m$, hurrenez hurren. Sokaren eskuineko erpinean dago koordenatu-jatorria; gainera, $t = 0$ aldiunean, sokako puntu hori desplazamendu nuluko posizioan dago, eta abiadura positiboa du.

Lortu honako hauek:

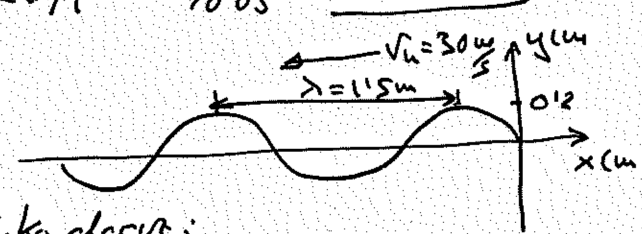
a) Uhin-zenbakia eta maiztasun angeluarra.
b) Sokaren higidura ondulatorioa deskribatzen duen ekuazioa
c) Sokako puntu batek lortuko dituen abiadura maximoa eta azelerazio maximoa.

a) Uhin zenbakia: $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1'5} = 1'33\pi \frac{rad}{m} = 4'19 \frac{rad}{m}}$

Hedapen abiaduratik: $v_h = \frac{\lambda}{T} \rightarrow T = \frac{\lambda}{v_h} = \frac{1'5}{30} = 0'05s$ → Orduan →

→ maiztasun angeluarra: $\boxed{\omega = 2\pi/T = 2\pi/0'05 = 40\pi\ rad/s}$

b) Uhin-funtzio orokorretik abiatuta:




$y(x,t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right)$

$A = 0'2m$ izanik datuak ordezkatuko dogu:

$y(x,t) = 0'2\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{0'05}t + \frac{2\pi}{1'5}x + \varphi_0\right)$

Dinoskue $y(0,0) = 0$. Horregaz lantzen:

$y(0,0) = 0 \rightarrow 0 = 0'2\cdot\sin\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = \arcsin 0 \begin{cases} \varphi_0 = 0\ rad \\ \varphi_0 = \pi\ rad \end{cases}$

Besai dinoskue $v(0,0) > 0$. Horretarako $v(x,t)$ kalkulatuko dogu:

$v(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = 0'2\cdot\frac{2\pi}{0'05}\cos\left(\frac{2\pi}{0'05}t + \frac{2\pi}{1'5}x + \varphi_0\right)$

Holan: $v(0,0) = 0'2\,\frac{2\pi}{0'05}\cos(\varphi_0) > 0 \Rightarrow$ Horretarako $\varphi_0 = 0\,rad$

Beraz uhin-funtzioa: $\boxed{y(x,t) = 0'2\sin\left(\frac{2\pi}{0'05}t + \frac{2\pi}{1'5}x\right)}$

c) $v(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = 0'2\cdot\frac{2\pi}{0'05}\cos\left(\frac{2\pi}{0'05}t + \frac{2\pi}{1'5}x\right) \rightarrow v_{max} = v\Big|_{\cos = \pm 1} \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{v_{max} = \pm 0'2\cdot\frac{2\pi}{0'05} = \pm 25'13\,m/s}$

$a(x,t) = \frac{dv(x,t)}{dt} = -0'2\cdot\left(\frac{2\pi}{0'05}\right)^2\sin\left(\frac{2\pi}{0'05}t + \frac{2\pi}{1'5}x\right) \rightarrow a_{max} = a\Big|_{\sin = \pm 1} \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{a_{max} = \pm 0'2\cdot\left(\frac{2\pi}{0'05}\right)^2 = \pm 3158'27\,m/s^2}$

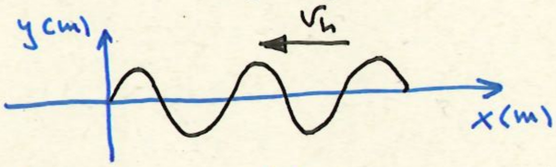
**2022-7-A2**

Hona hemen, Nazioarteko Unitate Sistemaren adierazita, soka batean hedatzen ari den uhin harmoniko baten ekuazioa:

y(x,t) = 0,2 sin(2t+4x+π/4)

Kalkulatu:

a) Periodoa, maiztasuna, uhin-luzera eta hedapen-abiadura.
b) Bibrazioaren abiadura maximoa sokaren puntu batean, edozeinetan.
c) Sokaren bi punturen arteko fase-diferentzia, bata bestetik 50 cm-ra egonez gero.




a) Uhin baten uhin-funtzioagaz aldaratuko dogu terminoak kalkulatzen hasteko.

$$y(x,t) = A\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right) \text{ (m)}$$

Holan: $\boxed{A = 0'2\,m}$; $2 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \boxed{T = \pi\,s} \rightarrow \boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\pi}\,Hz}$

$\frac{2\pi}{\lambda} = 4 \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\pi}{2}\,m}$; $\boxed{v_h = \frac{\lambda}{T} = \frac{\pi/2}{\pi} = 0'5\,m/s}$; $\boxed{\varphi_0 = \frac{\pi}{4}\,rad}$

b) Bibrazio-abiadura kalkulatzeko uhin-funtzioa deribatuko dogu:

$$v(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = 0'4\cdot\cos(2t + 4x + \pi/4) \text{ (m/s)}$$

Bere maximoa cosinu ±1 izatean gertatzen da: $\boxed{v_{max} = \pm 0'4\,m/s}$

c) Fase diferentzia:

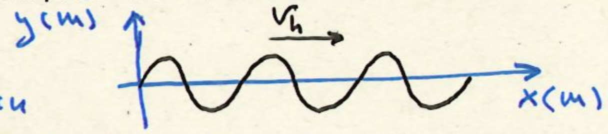
$$\boxed{\Delta\varphi_{x,x+0'5}} = \varphi_{x+0'5} - \varphi_x = [2t + 4(x+0'5) + \pi/4] - (2t + 4x + \pi/4) =$$

$$= 4\cdot 0'5 = \boxed{2\,rad}$$

**2022-6-A3**

OX ardatzean dagoen soka batetik zeharkako uhin bat hedatzen da. Hedapenaren noranzkoa OX ardatzaren noranzko positiboa da. Uhinaren adierazpide matematikoak t = 0s eta t = 2s bi aldiunetan hauek dira: $y(x,0) = 0{,}1\cos(\pi - 4\pi x)m$ eta $y(x,2) = 0{,}1\cos(11\pi - 4\pi x)m$, magnitude guztiak SI Sisteman adierazita daudelarik. Kalkulatu:

a) Maiztasun angeluarra.
b) Uhinaren adierazpide matematikoa.
c) Uhinaren hedapen-abiadura eta sokaren edozein puntu baten bibrazio azelerazio maximoa.




a) X ardatzaren noranzkoa positiboan hedatzen den uhin baten uhin-funtzioa hau da:

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - Kx + \varphi_0)$$

Emoten diran bi baldintzak erabiliz:

$$y(x,0) = 0'1\cos(\pi - 4\pi x) = A\cdot\cos(\omega\cdot 0 - Kx + \varphi_0) \quad (1)$$
$$y(x,2) = 0'1\cos(11\pi - 4\pi x) = A\cdot\cos(\omega\cdot 2 - Kx + \varphi_0) \quad (2)$$

Hemendik zuzenean identifikatuz: $\begin{cases} A = 0'1 m \\ K = 4\pi \text{ rad/m} \\ \varphi_0 = \pi \text{ rad} \quad (1 \text{ ekuaziotik}) \end{cases}$

Bigarren ekuazioan ordezkatuz:

$$y(x,2) = 0'1\cdot\cos(11\pi - 4\pi x) = 0'1\cdot\cos(2\omega - 4\pi x + \pi) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 11\pi - 4\pi x = 2\omega - 4\pi x + \pi \rightarrow 2\omega = 10\pi \rightarrow \boxed{\omega = 5\pi \text{ rad/s}}$$

b) Datu guztiakaz, uhinaren uhin-funtzioa:

$$\boxed{y(x,t) = 0'1\cdot\cos(5\pi t - 4\pi x + \pi)} \text{ m}$$

c) Uhinaren hedapen-abiadura (aurreratzen dauana denporan):

$$\boxed{v_h} = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi/K}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{K} = \frac{5\pi \text{ rad/s}}{4\pi \text{ rad/m}} = \boxed{1'25 \frac{m}{s}}$$

Bibrazio-azelerazioa lortzeko lehen bibrazio-abiadura kalkulatuko dot:

$$v(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = -0'1\cdot 5\pi \sin(5\pi t - 4\pi x + \pi) \text{ m/s}$$

Berriro deribatzen bibrazio-azelerazioa lortzen da:

$$a(x,t) = \frac{dv(x,t)}{dt} = -0'1(5\pi)^2\cos(5\pi t - 4\pi x + \pi) \text{ m/s}^2$$

Honen maximoa cosinu ±1 danean daukagu; beraz:

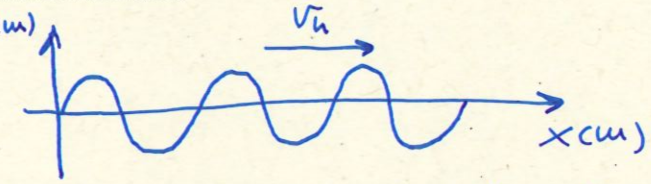
$$\boxed{a_{max}} = \pm 0'1\cdot 25\cdot\pi^2 = \boxed{24'67 \text{ m/s}^2}$$

**2021-7-A3**

A3.- Uhin baten ekuazioa *y = 0,6sin(18π·t-2π·x)* da, SI sistemako unitatetan adierazita. Kalkulatu:

a) Uhinaren hedapen-abiadura.
b) x = 3m puntuari dagokion bibrazio-abiadura, t = 8 s aldiunean.
c) Puntu horretan, bibrazio-higiduraren azelerazio maximoa.

$\boxed{y(x,t) = 0'6\sin(18\pi t - 2\pi x)}$




a) Hedapen-abiadura kalkulatzeko λ eta f lortu behar dogu. Horretarako uhin honen ekuazioa uhin-funtzio orokorragaz aldaratuko dogu: $y(x,t) = A\sin(2\pi \cdot f \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x + \varphi_0)$

Hdan, kasu honetan: $18\pi t = 2\pi f \cdot t \longrightarrow \boxed{f = 9Hz}$

$2\pi x = \frac{2\pi}{\lambda} x \longrightarrow \boxed{\lambda = 1m}$

Hedapen-abiaduraren formulagaz: $\boxed{v_h = \lambda \cdot f = 9 \cdot 1 = 9 m/s}$

b) Bibrazio-abiadura kalkulatzeko uhinaren ekuazioa denporan deribatu:

$$v(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = 10'8\pi \cos(18\pi t - 2\pi x) \ m/s$$

Bertan x = 3m eta t = 8s:

$$\boxed{v(3,8) = 10'8\pi\cos(18\pi 8 - 2\pi 3) = 10'8\pi = 33'93 m/s}$$

c) Berriro, azelerazioa lortzeko abiadura deribatuko dogu:

$$a(x,t) = \frac{dv(x,t)}{dt} = -10'8 \cdot 18 \cdot \pi^2 \sin(18\pi t - 2\pi x)$$

Maximoa sinu 1 edo -1 izatean:

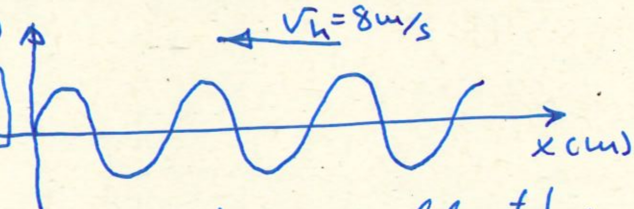
$$\boxed{a_{max} = \pm 10'8 \cdot 18 \cdot \pi^2 = \pm 1918'65 m/s^2}$$

**2021-6-A2**

A2.- Soka batean OX ardatzean hedatzen ari den uhin baten hedapen-abiadura 8 m/s da. Uhinaren ekuazioa, SI sistemako unitatetan, honako hau da: *$y = 0{,}03\sin(16\pi \cdot t + k \cdot x)$*. Kalkulatu:

a) Anplitudea, maiztasuna eta uhinaren hedapenaren noranzkoa.
b) k-ren balioa (k = uhin-zenbakia)
c) Zer abiadura duen x = 0,5 m posizioan dagoen sokako puntuak t = 60s aldiunean.

$$\boxed{y(x,t) = 0'03\sin(16\pi t + kx)\ (m)}$$




a) Daukagun ekuazioa uhin-funtzio orokorragaz aldaratuta:

$$y(x,t) = A\sin(2\pi \cdot f t - kx)$$

$\boxed{A = 0'03\,m}$ $\boxed{f = 8\,Hz}$ $\boxed{\text{Noranzka negatiboa}}$

b) Hedapen abiadura 8 m/s dela jakinda: $v_h = \lambda \cdot f \to \boxed{\lambda = \frac{v_h}{f} = \frac{8}{8} = 1\,m}$

Holan: $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\ \frac{rad}{m}}$

c) Abiadura kalkulatzeko ekuazioa osatuko dogu, gero deribatu denporan, eta azkenik lekua eta aldiunea ordezkatu:

$$\boxed{y(x,t) = 0'03\sin(16\pi t + 2\pi x)}\ m$$

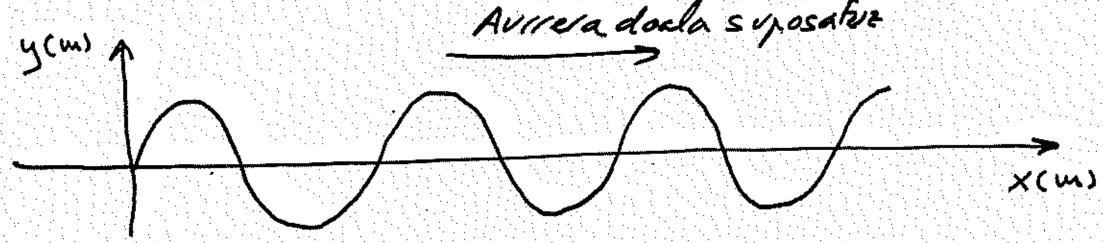
$$v(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = 16\pi \cdot 0'03\cos(16\pi t + 2\pi x)\ m/s$$

Holan: $\boxed{v(0'5,60) = 16\pi \cdot 0'03\cos(16\pi \cdot 60 + 2\pi \cdot 0'5) = -1'51\,m/s}$

2020-7-A3

**A3.-** 0,5 s-ko periodoa, 160 cm-ko uhin-luzera eta 80 cm anplitudea duen zeharkako uhin bat soka oso luze batean zehar hedatzen da OX ardatzaren norabide positiboan. Hasierako aldiunean, uhinaren anplitudea eta hasierako fasea nuluak dira x = 0 m puntuan.

a) Idatzi uhin-ekuazioa
b) Kalkulatu uhinaren hedapen-abiadura.
c) Idatzi zein izango den zeharkako abiadura denboraren funtzioan, x = 160 cm-ko posizioan




a) Ekuazio lortzeko uhin-funtzioan ezagutzen doguzan datuak sartuko doguz:

$$y(x,t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x + \varphi_0\right)$$

Datuak: $\boxed{A = 0'8\,m}$ ; $\boxed{T = 0'5\,s}$ ; $\boxed{\lambda = 1'6\,m}$

Momentuz: $y(x,t) = 0'8 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{0'5}t - \frac{2\pi}{1'6}x + \varphi_0\right)$

Gainera dinoskue: $y(0,0) = 0 = 0'8 \cdot \sin\varphi_0 \rightarrow \boxed{\varphi_0 = 0\,rad}$

Holan:

$$\boxed{y(x,t) = 0'8 \cdot \sin(4\pi t - 1'25\pi x)}$$

b) Hedapen abiadura $\boxed{v = \lambda/T} = 1'6/0'5 = \boxed{3'2\,m/s}$

c) Zeharkako abiadura kalkulatzeko elongazioarena deribatuz:

$$v(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = 0'8\cdot 4\pi \cos(4\pi t - 1'25\pi x)$$

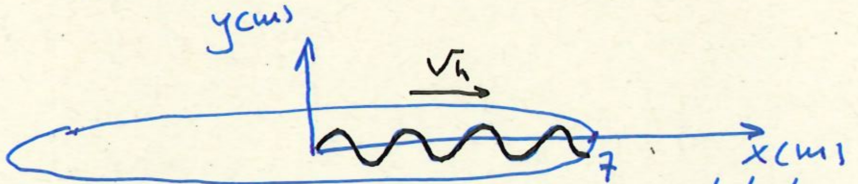
Holan, eskatutakoa:

$$\boxed{v(1'6,t) = 3'2\pi \cdot \cos(4\pi t - 2\pi)\ m/s}$$

**2019-7-B-P2**

P2.- 7m-ko erradioa (R) duen piscina zirkular baten zentroan (x=0 eta y=0) perturbazio bat sortzen da eta horren ondorioz uraren gainazalean uhin.higidura bat sortzen da. Uhinaren uhin-luzera 0,50 m-koa da eta 14 s behar ditu piszinaren ertzera heltzeko (x=R). Kalkula itzazu:

a) Uhin-higiduraren maiztasuna eta uhinaren ekuazioa (X ardatzean norabide positiboan hedatzen denean eta uhinaren anplitudearen balioa "A" denean).
b) Uhin-higiduraren anplitudea (funtzio sinusoidala erabiliz), 0,25 s igaro ondoren jatorrian duen elongazioa 4 cm-koa bada.
c) t = 14 s den aldiunean uhinak izango duen elongazioa sorgunetik 7 m-ra dagoen puntu batean.




a) Jakinda $\lambda = 0'5\,m$ dala eta 14s behar davala 7m betetzeko:

$$v_h = \frac{e}{t} = \frac{7m}{14s} = 0'5\,m/s \rightarrow v_h = \lambda \cdot f \rightarrow \boxed{f = \frac{v_h}{\lambda} = \frac{0'5}{0'5} = 1\,Hz}$$

Uhin-funtzio orokorra beheko dogu: $y(x,t) = A\sin(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0)$

$A = A$; $f = 1$; $\lambda = 0'5$; eta $\varphi_0 = 0$ suposatuz:

$$\boxed{y(x,t) = A\sin(2\pi t - 4\pi x)}\ (m)$$

b) Aipatutako lekua eta momentua erabiliz: $y(0, 0'25) = 0'04\,m \rightarrow$

$$\rightarrow 0'04 = A\sin(2\pi \cdot 0'25 - 4\pi \cdot 0) \rightarrow 0'04 = A \cdot \sin(\tfrac{\pi}{2}) \rightarrow \boxed{A = 0'04\,m}$$

c) Ekuazio osoa erabiliz: $\boxed{y(x,t) = 0'04\sin(2\pi t - 4\pi x)\ (m)}$

Aipatutako lekuan eta momentuan:

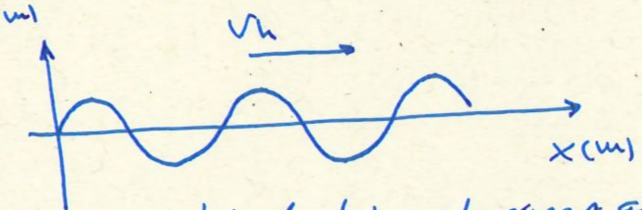
$$\boxed{y(7,14) = 0'04\sin(2\pi \cdot 14 - 4\pi \cdot 7) = 0'04\sin 0 = 0\,m}$$

**2019-6-A-P1**

P1.- uhin baten ekuazioa honako hau da. SIko unitatetan: *y = 2sin[(2π/5)·t-(π/4)·x]*. Kalkulatu:

a) Uhin-zenbakia eta uhin-luzera.
b) Bibrazio-higiduraren abiadura x = 4 m puntuan eta t = 8 s aldiunean.
c) Puntu horren azelerazioa leku eta aldiune horretan (x = 4 m puntuan eta t = 8 s aldiunean).

$$\boxed{y(x,t)=2\sin\left(\frac{2\pi}{5}t-\frac{\pi}{4}x\right)\ (m)}$$




a) Eskatzen denerako ekuazio hau uhin-funtzio orokorragaz alderatuz:

$$y(x,t)=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_0\right) \longrightarrow A=2m\ ;\ T=5s\ ;\ \boxed{\lambda=8m}$$

Eta $K=\frac{2\pi}{\lambda}$ izanik: $\boxed{k=\frac{\pi}{4}\ rad/m}$

b) Hasteko bibrazio-abiadura kalkulatuko dogu, ekuazioa deribatuz:

$$\boxed{v(x,t)=\frac{dy(x,t)}{dt}=\frac{4\pi}{5}\cos\left(\frac{2\pi}{5}t-\frac{\pi}{4}x\right)\ m/s}$$

Aipatutako momentu eta lekurako:

$$\boxed{v(4,8)=\frac{4\pi}{5}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\cdot 8-\frac{\pi}{4}\cdot 4\right)=2'033\ m/s}$$

c) Era berdinean azelerazioarako:

$$\boxed{a(x,t)=\frac{dv(x,t)}{dt}=-\frac{8\pi^2}{25}\sin\left(\frac{2\pi}{5}t-\frac{\pi}{4}x\right)\ m/s^2}$$

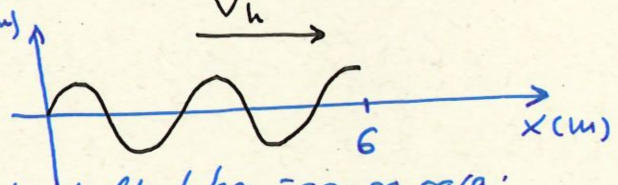
Beraz:

$$\boxed{a(4,8)=-\frac{8\pi^2}{25}\sin\left(\frac{16\pi}{5}-\pi\right)=-1'86\ m/s^2}$$

**2018-7-A-P2**

P2.- Sei metro luze den soka baten muturretako bat (x = 0) gora eta behera higitzen ari da 60 Hz-eko maiztasuneko higidura harmoniko sinplearekin. Sortutako uhina 0,5 segundoan heltzen da sokaren beste muturrera.

a) Idatzi uhinaren ekuazio orokorra, jakinik uhinaren anplitudea A = 0,03 m dela eta hasierako fasea $\varphi_0 = \pi/2$ rad dela.
b) Kalkulatu zer distantziatara dauden sokako bi puntu baldin eta haien arteko fase-diferentzia $2\pi$ rad bada.
c) Kalkulatu uhinaren gehieneko bibrazio-abiadura.




a) Emandako datuakaz terminoak kalkulatzen joango gara:

$$v_h = \frac{e}{t} = \frac{6\,m}{0'5\,s} = 12\,m/s \quad ; \; f \text{ eragututa} \rightarrow v_h = \lambda \cdot f \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{v_h}{f} = \frac{12}{60} = 0'2\,m}$$

Uhin-funtzioa osotzu: $y(x,t) = A \sin\left(2\pi \cdot f t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi_0\right) \rightarrow$

$$\boxed{y(x,t) = 0'03 \sin\left(120\pi t - 10\pi x + \frac{\pi}{2}\right) \; (m)}$$

b) Desfasea $2\pi$ rad-koa izanik, d distantziara dagozan bi puntu orokor hartuko dogu: $x_1 = x$ eta $x_2 = x + d$. Holan:

$$\Delta\varphi_{x_1 x_2} = \varphi_{x_1} - \varphi_{x_2} = \left(120\pi t - 10\pi x + \frac{\pi}{2}\right) - \left(120\pi t - 10\pi (x+d) + \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi \rightarrow$$

$$\rightarrow 10\pi d = 2\pi \rightarrow \boxed{d = \frac{1}{5} = 0'2\,m}$$

c) Hasteko bibrazio-abiadura kalkulatuko dogu, elongazioa deribatuz:

$$v(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = 0'03 \cdot 120\pi \cos\left(120\pi t - 10\pi \cdot x + \frac{\pi}{2}\right) \; (m/s)$$

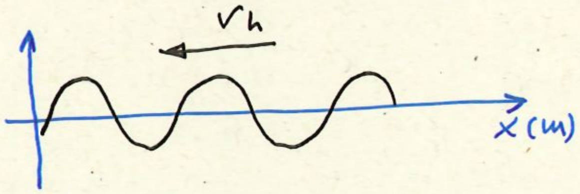
Holan maximoa cosinu 1 edo −1 izatean gertatuko da:

$$\boxed{v_{max} = \pm 0'03 \cdot 120 \cdot \pi = \pm 11'31\,m/s}$$

**2017-7-B-P1**

P1.- 4 cm-ko anplitudeko eta 2 cm-ko uhin-luzerako zeharkako uhin harmoniko bat ingurune elastiko batean hedatzen ari da 25 cm/s-ko abiadurarekin OX ardatzaren noranzko negatiboan. t = 0 aldiunean, x = 0 puntuaren elongazioa 4 cm da.

a) Kalkulatu uhinaren periodoa eta idatzi dagokion uhin-ekuazioa.
b) Zer balio izango du, gehienez, uhina hedatzen ari den ingurune elastikoko puntu baten bibrazio-abiadurak?
c) Kalkulatu zer desfase dagoen bata bestetik 0,5 cm-z aldenduriko bi punturen artean.




a) Dakigunez $v_h = \frac{\lambda}{T}$ dala →

→ $\boxed{T = \frac{\lambda}{v_h} = \frac{2\,cm}{25\,cm/s} = 0'08\,s}$

Daukaguzan datukaz uhin-funtzioa osotuko dogu:

$$y(x,t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right) \Rightarrow y(x,t) = 0'04\sin\left(\frac{2\pi}{0'08}t + \frac{2\pi}{0'02}x + \varphi_0\right)$$

Orain, $\varphi_0$ kalkulatzeko, aipatzen dan 0m eta 0s-ko egoera aprobetxatuz:

$$y(0,0) = 0'04 \rightarrow 0'04 = 0'04\sin(0+0+\varphi_0) \rightarrow 1 = \sin\varphi_0 \rightarrow \boxed{\varphi_0 = \pi/2\ rad}$$

Berriro formula osotuz: $\boxed{y(x,t) = 0'04\sin\left(\frac{2\pi}{0'08}t + \frac{2\pi}{0'02}x + \pi/2\right)\ (m)}$

b) Hasteko bibrazio-abiadura kalkulatuko dogu, elongazioa deribatuz:

$$v(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = 0'04 \cdot \frac{2\pi}{0'08}\cos\left(\frac{2\pi}{0'08}t + \frac{2\pi}{0'02}x + \pi/2\right)\ (m/s)$$

Bere maximoa cosinu sedin 1 edo -1 izatean gertatzen da, beraz:

$$\boxed{v_{max} = \pm 0'04\frac{2\pi}{0'08} = \pm\pi\ \ /s}$$

c) Bi puntu orokor hartuz: $x_1 = x$ eta $x_2 = x + 0'005$ →

$$\Delta\varphi_{x_1,x_2} = \varphi_{x_2} - \varphi_{x_1} = \left(\frac{2\pi}{0'08} + \frac{2\pi}{0'02}(x+0'005) + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{2\pi}{0'08}t + \frac{2\pi}{0'02}x + \pi/2\right) = \frac{2\cdot 0'005}{0'02}\pi \rightarrow$$

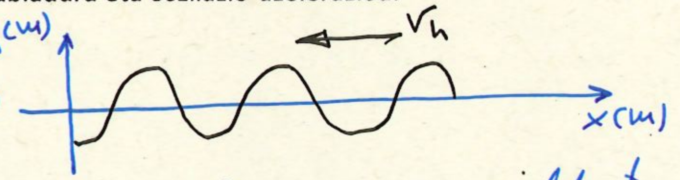
$$\rightarrow \boxed{\Delta\varphi_{x_1,x_2} = 0'5\pi = \frac{\pi}{2}\ rad}$$

**2017-6-A-P2**

P2.- Ekuazio honen bidez adieraz dezakegu soka tenkatu batean zehar hedatzen ari den uhin harmoniko bat: $y = 0{,}01\sin(10\pi\cdot t+2\pi\cdot x+\pi)$, non *x* eta *y* metrotan adierazita dauden eta t segundotan. Kalkulatu:

a) Uhinaren maiztasuna, uhin-luzera eta hedapen-abiadura.
b) Bata bestetik 0,2 m-ra dauden sokaren bi punturen arteko oszilazioen fase-diferentzia.
c) Sokaren puntu baten gehieneko oszilazio-abiadura eta oszilazio-azelerazioa.

$$\boxed{y(x,t) = 0'01\sin(10\pi t + 2\pi x + \pi)\ (m)}$$




a) Eskatutakoa lortzeko, zuzenean uhin-funtzio orokorragaz alderatuz:

$$y(x,t) = A\sin\left(2\pi f t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right) \rightarrow A = 0'01\,m \quad \boxed{f = 5\,Hz} \quad \boxed{\lambda = 1\,m}$$

Bi honekaz →

→ hedapen abiadura izanik: $\boxed{v_h = \lambda\cdot f = 1m\cdot 5Hz = 5\,m/s}$

b) Bi puntu orokor hartuz: $x_1 = x$ eta $x_2 = x + 0'2$ →

$$\boxed{\Delta\varphi_{x_1,x_2}} = \varphi_{x_2} - \varphi_{x_1} = [10\pi t + 2\pi(x+0'2) + \pi] - (10\pi t + 2\pi x + \pi) = \boxed{0'4\pi\,rad}$$

c) Oszilazio-abiadura kalkulatzeko elongazioa deribatuko dogu denporan:

$$v(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = 0'1\pi\cos(10\pi t + 2\pi x + \pi)\ m/s$$

Bere maximoa cosinu 1 edo -1 izatean gertatzen da, beraz:

$$\boxed{v_{max} = \pm 0'1\pi\ m/s}$$

Arrazonamendu berdinagaz:

$$a(x,t) = \frac{dv(x,t)}{dt} = -\pi^2\sin(10\pi t + 2\pi x + \pi)\ m/s^2 \rightarrow$$

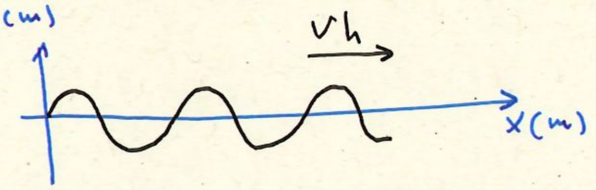
$$\rightarrow a_{max} \xrightarrow{\sin = \pm 1} \boxed{a_{max} = \pm\pi^2\ m/s^2}$$

**2016-7-A-P2**

P2.- Hona hemen zeharkako uhin baten ekuazioa nazioarteko sistemako unitatetan:

*y = 0,2sin[(π/3) · (3x-30t)]*

a) Kalkulatu uhinaren hedatze-abiadura.
b) Kalkulatu x posizioa duen puntu baten (edozein) gehieneko oszilazio-abiadura.
c) Zer aldiunetan izango du baliorik hendiena x = 2 m puntuaren oszilazio-abiadurak?




Jakinda $\sin\alpha = -\sin(-\alpha) \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{y(x,t) = -0'2\sin(10\pi t - \pi x)}$ m

a) Horretarako $\lambda$ eta $f$ behar diranez, uhin-funtzio orokorragaz aldaratuko dot: $y(x,t) = A\sin(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0) \rightarrow A = 0'2\ m$, $f = 5\ Hz$, $\lambda = 2\ m$

Holan $\boxed{v_h = \lambda\cdot f = 2\cdot 5 = 10\ m/s}$

b) Elongazioa denporagaz deribatzen oszilazio-abiadura lortzen da:

$$v(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = -2\pi\cos(10\pi t - \pi x)\ (m/s)$$

Bere maximoa cosinu 1 edo −1 denean: $\boxed{v_{max} = \pm 2\pi\ m/s}$

c) Puntu horretako oszilazio-abiadura maximoa, barriro, cosinuaren balioa puntu horretan 1 edo −1 izatean eukiko dogu. →

$\rightarrow \cos(10\pi t - \pi\cdot 2) = \pm 1 \rightarrow 10\pi t_n - \pi 2 = n\cdot\pi$ ; $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \rightarrow$

$\rightarrow 10t = n + 2 \rightarrow t_n = \frac{n+2}{10} \rightarrow$

$t_{-2} = 0\ s$
$t_{-1} = 0'1\ s$
$t_0 = 0'2\ s$
$t_1 = 0'3\ s$
⋮

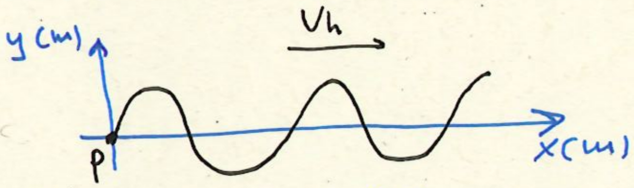
$\boxed{\text{Hau da denpora horren segida: } [0, 0'1, 0'2, 0'3, 0'4 \ldots]\ (s)}$

**2015-7-A-P2**

P2.- Soka baten P puntu bat higidura harmonikoarekin bibrarazten dugu, eta zeharkako uhin bat sortzen da. Hona hemen uhinaren higidura-ekuazioa, Nazioarteko Sistemaren unitateetan adierazita:

*y = 4sin[2π · (t/2-x/4)]*. Kalkulatu:

a) P puntutik 5 m-ra dagoen sokaren puntu baten bibrazio-abiadura t = 3 s denean.
b) Sokan bata bestetik 2 m-ra dauden bi punturen arteko fase-diferentzia.
c) Uhinaren hedapen-abiadura.




$$\boxed{y(x,t) = 4\sin\left(\pi t - \frac{\pi}{2}x\right)\ (m)}$$

a) Bibrazio-abiadura lortzeko elongazioa deribatuko dugu:

$$\boxed{v(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = 4\pi\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}x\right)\ m/s}$$

Aipatutako puntuan eta momentuan:

$$\boxed{v(5,3) = 4\pi\cos(3\pi - 2'5\pi) = 4\pi\cos 0'5\pi = 0\ m/s}$$

b) Bi puntu orokor hartuz: $x_1 = x$ ; $x_2 = x + d$ : $(d = 2m)$

$$\boxed{\Delta\varphi_{x_1,x_2} = \varphi_{x_1} - \varphi_{x_2} = \left(\pi t - \frac{\pi}{2}x\right) - \left(\pi t - \frac{\pi}{2}(x+d)\right) = \frac{\pi \cdot d}{2} = \pi\ rad}$$

c) Horretarako beharrezkoa da $\lambda$ eta $T$ identifikatzea.

Uhin-funtzio orokorragaz alderatuta:

$$y(x,t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right) \rightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{T} = \pi \rightarrow \boxed{T = 2s} \\ \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{\lambda = 4m} \end{cases}$$

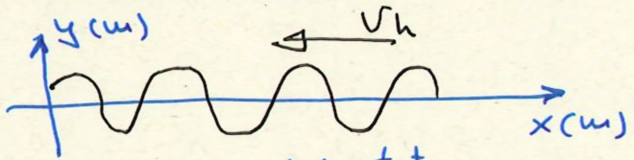
$\Rightarrow$ holan: $\boxed{V_h = \frac{\lambda}{T} = \frac{4}{2} = 2\ m/s}$

**2013-6-A-P1**

P1.- Hona hemen, Nazioarteko Unitate Sisteman adierazita, soka batean hedatzen ari den uhin harmoniko baten ekuazioa: *y(x,t)=0,2sin(2t+4x+π/4)*. Kalkulatu:

a) Periodoa, maiztasuna, uhin-luzera eta hedapen-abiadura.
b) Bibrazioaren abiadura maximoa sokaren edozein puntutan.
c) Sokaren bi punturen arteko fase-diferentzia, bata bestetik 50 cm-ra badaude.

$\boxed{y(x,t)=0'2\sin(2t+4x+\pi/4)\ (m)}$




a) Ekuasio hau uhin-funtzio orokorragaz alderatuta:

$$y(x,t)=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_0\right)$$

- $A=0'2\,m$
- $\boxed{T=\pi\,s} \rightarrow \boxed{f=\frac{1}{T}=\frac{1}{\pi}=\pi^{-1}\,Hz}$
- $\boxed{\lambda=0'5\pi\,m}$
- $\varphi_0=\pi/4$

⇒ Hedapen abiadura:

$v_h=\lambda\cdot f=0'5\cdot\pi\cdot\pi^{-1}=0'5\,m/s$ ⇒ X ardatzaren norantza negatiboan hedatzen denez, abiadura negatiboa da $\boxed{v_h=-0'5\,m/s}$

b) Masleko bibrasio-abiadura kalkulatuko dogu, elongazioa deribatuz:

$$v(x,t)=\frac{dy(x,t)}{dt}=0'4\cos(2t+4x+\pi/4)\ (m/s)$$

Abiadura maximoa cosinu 1 edo -1 izatean gertatzen da: $\boxed{v_{max}=\pm 0'4\,m/s}$

c) Puntu orokor bi hartuz: $x_1=x$ ; $x_2=x+0'5$. ⇒

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\varphi_{x_1,x_2}}=\varphi_2-\varphi_1=[2t+4(x+0'5)+\pi/4]-(2t+4x+\pi/4)=\boxed{2\,rad}$$

**2012-7-A-P2**

P2.- Higidura harmoniko sinple baten bidez, soka baten muturraren oszilazio mugimendua eragin dugu: 40 oszilazio egiten ditu sokak 10 segundoan, eta oszilazio bakoitzaren anplitudea 20 cm da. Soka 6 m luze da, eta 0,5 s behar du perturbazioak mutur batetik bestera joatek. Uhina OX ardatzaren noranzko positiboan hedatzen bada:

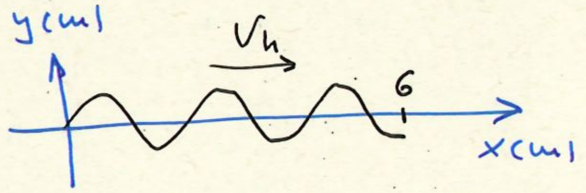
a) Idatz ezazu uhinaren ekuazioa, baldin eta, hasierako aldiunean, eragindako sokaren muturra oreka-posizioan badago.

b) Kalkula ezazu zer distantzia dagoen ondoz ondoko bi punturen artean baldin eta:

b1) fasean badaude

b2) fase-oposizioan badaude.

c) Perturbazioa hasi eta 6 segundo geroago, zer abiadura izango du muturretik 4 m-ra dagoen sokaren puntu batek?




a) Emandako datuez baliatuz:

$\boxed{A = 0'2\,m}$ $\boxed{f = \frac{40 \text{ oszilazio}}{10\,s} = 4\,Hz}$ $v_h = \frac{6m}{0'5s} = 12\,m/s \rightarrow$

$\rightarrow v_h = \lambda \cdot f \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{v_h}{f} = \frac{12}{4} = 3m}$

Momentuz, uhin-funtzio orokorrean ordezkatuz:

$y(x,t) = A \sin(2\pi \cdot f \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi_0) \rightarrow y(x,t) = 0'2 \sin(8\pi t - \frac{2}{3}\pi x + \varphi_0)$ m

Orain hasierako momentuko baldintza hartuta: $y(0,0) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 0 = 0'2 \sin(0 - 0 + \varphi_0) \Rightarrow \varphi_0 = 0$

Horlan ekuazioa: $\boxed{y(x,t) = 0'2 \sin(8\pi t - \frac{2}{3}\pi x)}$ (m)

b) Puntu orokorrak: $x_1 = x$; $x_2 = x + d$.

b1) FASEAN $\Delta\varphi_{x_1,x_2} = 2\pi \cdot n$; $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow (8\pi t - \frac{2}{3}\pi x) - [8\pi t - \frac{2}{3}\pi(x+d)] = 2\pi n \rightarrow \frac{2}{3}\pi d = 2\pi \cdot n \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{d = 3n\,(m);\ n = 0, \pm 1, \pm 2} \rightarrow$ Segida $d = [-6, -3, 0, 1, 3, 6]$

b2) FASE-OPOSIZIOAN $\Delta\varphi_{x_1,x_2} = (2n+1)\pi$; $n = 0, \pm 1, \pm 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \frac{2}{3}\pi d = (2n+1)\pi \rightarrow \boxed{d = \frac{3}{2}(2n+1);\ n = 0, \pm 1, \ldots} \rightarrow d = \frac{3}{2}, \frac{9}{2}; \frac{21}{2} \ldots$

c) $v(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = 8\pi 0'2 \cos(8\pi t - \frac{3}{3}\pi x) \rightarrow \boxed{v(4,6) = -2'513\ m/s}$